17/2/2020

Πολυωνυμικές εξισώσεις σε μια μεταβλητή

1) $ax+b=0$, $a\neq 0$ $\xrightarrow{\text{ρίζα}}$ $x=-\frac{b}{a}$

2) $ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$ επί του $\mathbb{C}$

Θέταμε $\Delta=b^2-4ac \in \mathbb{C}$

Επιλέγουμε $\omega\in\mathbb{C}$ με $\omega^2=b^2-4ac$

Τότε έχουμε δύο ρίζες (ταυτίζονται για $\Delta=0$)

$$\frac{-b\pm\omega}{2a}$$

3) $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$

4) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a\neq 0$

5) $f=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+\dots=0$, $a\neq 0$

Τι γίνεται τότε; Υπάρχουν τύποι για τους βαθμούς 3 και 4.

Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας

Πολυώνυμο n βαθμού έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$ (ενδεχομένως πολλαπλές)

Τι γίνεται για 5ου βαθμού και πάνω;

Abel: Δεν υπάρχει γενικός τύπος με ριζικά για εξισώσεις βαθμού ≥ 5.

Galois: Έδωσε πλήρη απάντηση για το ποια f υπάρχει τύπος. π.χ. $f=(x-1)^5$.

Με συνδυασμό των αποτελεσμάτων του Galois και αποτελεσμάτων της ανάλυσης λύθηκαν τα ακόλουθα (άλυτα από την αρχαιότητα) προβλήματα.

1) Δήλιο Πρόβλημα (Διπλασιασμός κύβου ο όγκος του νέου κύβου να είναι δύο φορές του παλιό) Δηλαδή από κύβο a^3, κατασκευάστε (με κανόνα και διαβήτη) κύβο όγκου $2a^3$. Ουσιαστικά το πρόβλημα ρωτάει αν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη ο πραγματικός αριθμός $\sqrt[3]{2}$ (για $a=1$). Δεν γίνεται!

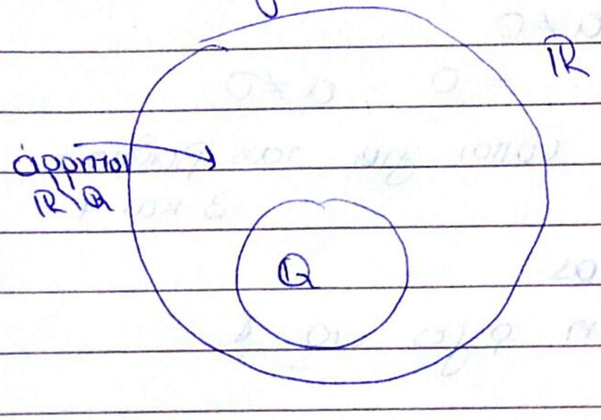
2) Τετραγωνισμός του κύκλου (με κανόνα και διαβήτη)

Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάστε τετράγωνο πλευράς $\sqrt{\pi}$.

Δεν γίνεται!

Η απόδειξη κάνει χρήση των ακολούθων:

1. Θεωρία Galois
2. Θεώρημα (Ferdinand von Linderman (γερμανός))
   1882 Ο π είναι "υπερβατικός".
   (Δηλαδή δεν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο σε μία μεταβλητή με ακεραίους συντελεστές και ρίζα το π.)



$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ = ξένη ένωση από "αλγεβρικούς άρρητους" και "υπερβατικούς άρρητους".

$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ Αλγ. άρρητος: αν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές ώστε $p(\alpha)=0$

Παράδειγμα Το $\alpha=\sqrt{2}$ αλγ. άρρητος

Απόδειξη άρρητος από Θεωρία Αριθμών

Αλγεβρικός άρρητος, γιατί είναι ρίζα του $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Z}[x]$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ο αριθμός e είναι υπερβατικός.

Ανοικτό πρόβλημα. Υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο δύο μεταβλητών $f(x,y)\in\mathbb{Z}[x,y]$ με $f(e,\pi)=0$.

Τύπος Euler: $e^{i\pi}=-1$

Υπενθύμιση: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, για $\varphi\in\mathbb{R}$

3) Τριχοτόμηση οξείας γωνίας (με κανόνα και διαβήτη)

Θα δούμε ότι για κάποιες γωνίες γίνεται ενώ για άλλες όχι

Γεωμετρικό πρόβλημα $\xrightarrow[\text{Θ. Galois}]{\text{Θ. Σωμάτων}}$ Πρόβλημα για σώματα $\mathbb{F}$
με $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ $\xrightarrow[\text{Θ. Galois}]{\text{Θ.Θ. Αλγ.}}$ Πρόβλημα για πεπερασμένες Ομάδες.

4) Κατασκευή για ποια n κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη το κανονικό n-γωνο.

Στοιχεία Θεωρίας Δακτυλίων.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα R λέγεται <u>ακέραια περιοχή</u> αν $|R| \geq 2$ και για κάθε $x,y \in R \setminus \{0_R\}$ ισχύει $xy \neq 0$. Λέγεται <u>σώμα</u> αν $|R| \geq 2$ και για κάθε $x \in R \setminus \{0_R\}$ υπάρχει $y \in R$ με $xy = 1_R$.

<u>Πρόταση</u>: R Σώμα $\Longrightarrow$ R ακέραια περιοχή
<u>Απόδειξη</u>: (με άτοπο) Έστω $x,y \in R \setminus \{0_R\}$ με $xy = 0_R$. Αφού R σώμα και $x \neq 0$, υπάρχει $z \in R$ με $z \cdot x = 1_R$. Συνεπώς $xy = 0_R \Rightarrow z(xy) = z \cdot 0_R \Rightarrow (zx)y = 0_R \Rightarrow 1_R y = 0_R \Rightarrow y = 0_R$, αντίφαση.

<u>Ορισμός</u>: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1 και I ιδεώδες του R.
1) Το I λέγεται <u>ΠΡΩΤΟ</u> αν $I \neq R$ και $x \in R \setminus I$, $y \in R \setminus I$ συνεπάγεται $xy \in R \setminus I$
2) Το I λέγεται <u>MAXIMAL</u> αν $I \neq R$ και το μόνο ιδεώδες του R που περιέχει <u>ΓΝΗΣΙΑ</u> το I είναι το R.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: I πρώτο ιδεώδες του R (μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα) αν και μόνο αν $R \setminus I$ ακέραια περιοχή.
<u>Πόρισμα</u>: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1 και I ιδεώδες του R. Τότε I maximal $\Rightarrow$ I πρώτο ιδεώδες.
Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει. Το ιδεώδες $\{0_R\}$ του $\mathbb{Z}$ είναι πρώτο, γιατί $\mathbb{Z}$ ακέραια περιοχή αλλά όχι maximal, γιατί $\{0_R\} \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$

άρτια ακέραια

Παράδειγμα: Το $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια περιοχή αλλά όχι σώμα.

Πρόταση: Έστω R ακέραια περιοχή $|R| < \infty$. Τότε R σώμα.

Απόδειξη: Έστω $x \in R \setminus \{0_R\}$. Ορίζουμε $\varphi : R \to R$,

$\varphi(y) = xy$.

Ισχυρισμός 1: φ 1-1.

απόδειξη: Έστω $y, y' \in R$ με

$\varphi(y) = \varphi(y') \Rightarrow xy = xy' \Rightarrow$

$xy - xy' = 0 \Rightarrow x(y - y') = 0 \Rightarrow$ (R ακ. περ. $x \neq 0_R$)

$y - y' = 0 \Rightarrow y = y'$

Αφού φ 1-1 και άρα πεπερασμένο ($|R| < \infty$) και $\varphi : R \to R$, από θεωρία συνόλων φ ΕΠΙ.

Άρα υπάρχει $y \in R$ με $\varphi(y) = 1_R \Rightarrow xy = 1_R$

Συνεπώς R σώμα.

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε $(\mathbb{Z}/(n), +, \cdot)$ το δακτύλιο $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ των ακεραίων modulo n.

Άρα από θεωρία Αριθμών $\mathbb{Z}/(n) = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$

Πρόταση: Τ.Α.Ε.Ι. : για $n \geq 2$

1) n πρώτος

2) $\mathbb{Z}/(n)$ Σώμα

3) $\mathbb{Z}/(n)$ ακέραια περιοχή (γνωστό από Αλγ. Δομές Ι)

Παρατήρηση: Δακτύλιος σημαίνει (σε αυτό το μάθημα) μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Ορισμός: Έστω R_1, R_2 δακτύλιοι, $\varphi : R_1 \to R_2$ συνάρτηση.

Η φ λέγεται ομομορφισμός δακτυλίων αν

i) $\varphi : (R_1, +) \to (R_2, +)$ είναι ομομορφ. ομάδων

ii) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ για κάθε a, b $a, b \in R_1$

Παρατήρηση: Το i) είναι ισοδύναμο με $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ για κάθε $a, b \in R_1$

Παρατήρηση: Η μηδενική απεικόνιση $\varphi: R_1 \to R_2$

$\varphi(a) = 0_{R_2}$ για κάθε $a \in R_1$ είναι ομομορφ. δακτυλίων.

Πρόταση: Έστω R_2 ακέραια περιοχή και $\varphi: R_1 \to R_2$ μη μηδενικός ομομορφ. δακτυλίων. Τότε $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$.

Απόδειξη: Θέτουμε $u = \varphi(1_{R_1}) \in R_2$

Ισχυρισμός 1 $u \neq 0_{R_2}$.

Απόδειξη Έστω $u = 0$ και $a \in R_1$. Τότε $a = a \cdot 1_{R_1}$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a \cdot 1_R) = \varphi(a) \cdot \varphi(1_R) = \varphi(a) \cdot u$

$= (\varphi(a)) \cdot 0_{R_2} = 0_{R_2}$, άτοπο, γιατί φ όχι ο μηδενικός ομομορφ. δακτυλίων

Ισχυρισμός 2 $u = 1_{R_2}$

Απόδειξη $1_{R_1} = 1_{R_1} \cdot 1_{R_1} \Rightarrow \varphi(1_{R_1}) = \varphi(1_{R_1} \cdot 1_{R_1})$

$\Rightarrow \varphi(1_{R_1}) = \varphi(1_{R_1}) \cdot \varphi(1_{R_1}) \Rightarrow u = u \cdot u \Rightarrow$

$u - u \cdot u = 0_{R_2} \Rightarrow u(1_{R_2} - u) = 0 \xRightarrow[u \neq 0 \text{ από Ισχυρ. } 1]{R_2 \text{ ακ. περ.}}$

$1_{R_2} - u = 0_{R_2} \Rightarrow u = 1_{R_2}$.

Πρόταση: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $|R| \geq 2$. Τ.Α.Ε.Ι.

i) Το R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.

ii) Το R είναι σώμα.

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii) Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \in R \setminus \{0\}$ τότε το x έχει αντίστροφο. Θέτουμε $I = \{r \cdot x \mid r \in R\}$.

Ισχυρισμός 1 I ιδεώδες του R, $x \in I$.

Απόδειξη Για $r = 1_R$, $x = 1_R$, $x \in I$, άρα $I \neq \emptyset$

Πρέπει να δείξουμε ότι αν $a, b \in I$, $r \in R$ τότε $a - b \in I$ και $ra \in I$.

Αφού $a, b \in I$, υπάρχουν $r_1, r_2 \in R$ με $a = r_1 \cdot x$

$b = r_2 \cdot x$.

Συνεπώς, $a - b = r_1 x - r_2 \cdot x = (r_1 - r_2) \cdot x \in I$ και

$ra = r(r_1 x) = (r r_1) x \in I$

Ισχυρισμός 2 $I = R$.

Απόδειξη Αφού $x \in I$ και $0 \neq x$ έπεται $I \neq \{0_R\}$
Από υπόθεση, τα μόνα ιδεώδη του R είναι τα $\{0_R\}$ και R. Συνεπώς, $I = R$.
Άρα, αφού $1_R \in R \Rightarrow 1_R \in I$, συνεπώς υπάρχει $r \in R$ με $rx = 1_R$. Άρα x αντιστρέφεται στο R, συνεπώς R σώμα.

ii) $\Rightarrow$ i) Υποθέτουμε R σώμα
Έστω I ιδεώδες του R με $I \neq \{0_R\}$

Ισχυρισμός 3 $I = R$

Απόδειξη Έστω $z \in R$ αφού $I \neq \{0_R\}$ υπάρχει $x \in I$ με $x \neq 0_R$. Αφού R σώμα υπάρχει $y \in R$ με $y \cdot x = 1_R$.
Έχουμε $z = 1_R \cdot z = (yx)z = (yz) \cdot x \in I$.
γιατί $x \in I$ και I ιδεώδες. Συνεπώς $I = R$

Τέλος Απόδειξης

Παρατήρηση: Η παραπάνω απόδειξη δίνει το εξής. Έστω R μεταθ. δακτύλιος με μονάδα, με $|R| \geq 2$ και $x \in R$. Τότε το x είναι αντιστρέψιμο αν-ν το ιδεώδες $(x) = \{r \cdot x : r \in R\}$ που παράγει είναι ίσο με το R.

Πόρισμα: Έστω $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ σώματα και $g: \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ ομομ. δακτυλίων.
Υποθέτουμε ότι g όχι ο μηδενικός ομομορφισμός
Τότε $g(1_{\mathbb{F}_1}) = 1_{\mathbb{F}_2}$ και επιπλέον g 1-1.

Απόδειξη Αφού $\mathbb{F}_2$ σώμα έχουμε $\mathbb{F}_2$ ακέραια περιοχή. Συνεπώς από πρόταση $g(1_{\mathbb{F}_1}) = 1_{\mathbb{F}_2}$. Από Αλγεβρικές Δομές I ορίζουμε $\ker g = \{a \in \mathbb{F}_1, \text{ με } g(a) = 0_{\mathbb{F}_2}\}$ και έχουμε $\ker g$ ιδεώδες του $\mathbb{F}_1$. Αλλά $\mathbb{F}_1$ σώμα, άρα από την Πρόταση τα μόνα ιδεώδη του $\mathbb{F}_1$ είναι τα $\{0_{\mathbb{F}_1}\}$ και $\mathbb{F}_1$.
Αν $\ker g = \mathbb{F}_1$. Προφανώς η g είναι ο μηδενικός ομομορφισμός αντίφαση.
Άρα,
$$\ker g = \{0_{\mathbb{F}_1}\} \xRightarrow[\text{Αλγ. Δομές I}]{\text{Από}} g \text{ 1-1}$$